

FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE – RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1. Etude locale

Comparaison, équivalence et continuité locale

DÉFINITION (VOCABULAIRE DE BASE)

On considère une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- **négligeabilité** : $f(x) = o(g(x)) \iff \varphi$ définie au voisinage de a telle que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$

$$\rightsquigarrow \text{si } g(x) \neq 0 \text{ au voisinage de } a : f(x) = o(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

- **équivalent** : $f(x) \sim_a g(x) \iff \varphi$ définie au voisinage de a telle que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$

$$\rightsquigarrow \text{si } g(x) \neq 0 \text{ au voisinage de } a : f(x) \sim_a g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1.$$

- **continuité locale** : si f est définie au voisinage de a et en a :
 f est continue en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
on parle de continuité à droite (resp. à gauche) si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$)

- **prolongement par continuité** : si f est définie au vois. de a mais pas en a :
 f est prolongeable par continuité en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

et dans ce cas $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ \ell & x = a \end{cases}$ est le prolongement de f .

REMARQUE 1. 1. La fonction f peut ne pas être définie en a mais seulement au voisinage de a . C'est le cas de façon évidente lorsque $a = \pm\infty$ mais cela peut être le cas pour $a \in \mathbb{R}$. En particulier lorsque nous étudions des problèmes de prolongement par continuité.

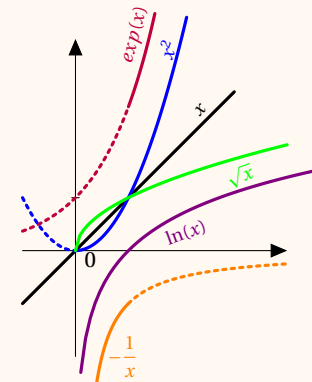
2. Les propriétés et règles opératoires associées à ces deux notions sont identiques à celles que nous avons rappelées sur les suites. Nous renvoyons donc le lecteur à ces propriétés. Nous nous attachons donc uniquement aux propriétés spécifiques aux fonctions qui n'ont pas de traduction dans le langage des suites.

PROPRIÉTÉ 5

- **croissances comparées** : Avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^5$.

$$\begin{aligned} (\ln(x))^\alpha &\underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \\ x^\beta &\underset{+\infty}{=} o(x^{\beta+\gamma}) \\ x^\delta &\underset{+\infty}{=} o(e^{\varepsilon x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{\alpha+\beta} &\underset{0}{=} o(x^\beta) \\ x^\gamma &\underset{0}{=} o((\ln(x))^\delta) \end{aligned}$$



• **équivalents de fonctions polynomiales :**

en $\pm\infty$: Toute fonction polynomiale est équivalente, quand $x \rightarrow \pm\infty$, à son monôme de plus **haut** degré.

en 0 : Toute fonction polynomiale est équivalente, quand $x \rightarrow 0$, à son monôme de plus **bas** degré.

• **équivalents usuels :**

$$\begin{array}{ll} \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x & (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \neq 0) \\ \ln(u) \underset{1}{\sim} u-1 & \sin(x) \underset{0}{\sim} x \\ e^x - 1 \underset{0}{\sim} x & 1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \end{array}$$

• **lien entre les deux notions :** $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) = \underset{a}{g}(x) + o(g(x))$

Méthode

Lorsqu'on cherche un équivalent d'une fonction (a priori plus complexe), on cherche d'abord à décomposer cette fonction en produit, quotient ou puissance de fonctions plus élémentaires dont on cherchera un équivalent.

Par exemple, pour $f(x) = \frac{(e^x - 1)^4}{(-3x^2 + x^3 - x^4)^2}$:

• on cherche un équivalent simple à $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et à $-3x^2 + x^3 - x^4 \underset{0}{\sim} -3x^2$.

• puis on utilise les propriétés usuelles : $\frac{(e^x - 1)^4}{(-3x^2 + x^3 - x^4)^2} \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{(-3x^2)^2}$
 $\Rightarrow f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{9}$

EXERCICE 1. Déterminer à l'aide d'un équivalent simple la limite des fonctions suivantes :

- $f(x) = -3x^4 + x^2 - 1$ en 0 et $-\infty$
- $f(x) = \frac{x^2 - 2x^5}{x^3 - x - 2}$ en 0 et $+\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ en 0 et $+\infty$.
- $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{e^x - 1}$ en 0
- $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ en 1 et -1
- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$ en 1
- $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{\frac{1}{x}}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x})}$ en $+\infty$

EXERCICE 2. Soit f la fonction définie sur $]0;1[$ par

$$f(x) = \frac{x \ln(1-x)}{x^2 + 2x}$$

- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer la valeur en 0 de la fonction ainsi prolongée.
- Déterminer la limite de f en 1^- .

Développement limité en un point, dérivabilité locale

DÉFINITION (VOCABULAIRE DE BASE)

Soit f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

• **dérivabilité locale :** on suppose f définie en a .

f est dérivable en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \in \mathbb{R}$ et on note $f'(a) = \ell$.

on parle de dérivabilité à droite (resp. à gauche) si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$)

• **développement limité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$.

f admet un $DL_n(a) \iff \exists p \in \mathbb{R}_n[x], f(x) = p(x-a) + o((x-a))$

REMARQUE 2.

Le polynôme $p \in \mathbb{R}_n[x]$ s'appelle la *partie régulière* du DL et il y a unicité d'un tel polynôme. En effet pour deux parties régulières $(p_1, p_2) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$ du $DL_n(a)$ de la même fonction f on a $p_1(x-a) = p_2(x-a)$ sur un voisinage de a . Autrement dit le polynôme $p_1 - p_2 \in \mathbb{R}_n[x]$ s'annule sur un voisinage de a et donc contient une infinité de racines, ce qui n'est possible que pour le polynôme nul : i.e : $p_1 = p_2$.

THÉORÈME 6 (DL D'ORDRE 1 ET DÉRIVABILITÉ EN UN POINT)

• si f est dérivable en a alors f admet un $DL_1(a)$ et :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{équation de la tangente}} + o(x - x_0)$$

• réciproquement, si f admet pour $DL_1(a)$:

$$f(x) = \underset{a}{f}(x) + a_1(x-a) + o((x-a)) \implies \left(\begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } a \text{ et} \\ a_0 = f(a) \quad a_1 = f'(a) \end{array} \right)$$

EXERCICE 3. On considère la fonction $\begin{cases} 1 + x + x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0.
2. En déduire sans aucun calcul que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
3. La fonction est-elle continue sur \mathbb{R}_+ ? Dérivable?

Dérivées successives, formule de Taylor-Young

DÉFINITION

On suppose f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

- **fonction dérivée** : si f est dérivable en tout point de I , l'application $x \mapsto f'(x)$, définie elle-même une fonction sur I , appelée dérivée de f sur I et notée f'
- **dérivées successives** : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit, si elle existe, la dérivée k -ième de f , notée $f^{(k)}$, la dérivée de la fonction $f^{(k-1)}$ sur I . Avec la convention que $f^{(0)} = f$. On dit que dans ce cas que f est k -fois dérivable sur I .
- **fonction de classe \mathcal{C}^k** :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \iff \begin{cases} f \text{ est } k\text{-fois dérivable sur } I \\ f^{(k)} \text{ est continue sur } I \end{cases}$$

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \iff \forall k \in \mathbb{N}, f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I.$$

THÉORÈME 7 (FORMULE DE LEIBNIZ)

Supposons f et g des fonctions n -fois dérivables sur I telles que la composition $f \circ g$ soit bien définie sur I . Alors $f \circ g$ est n -fois dérivable sur I et de plus :

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

THÉORÈME 8 (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG)

Si f est n -fois dérivable sur au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

REMARQUE 3.

La démonstration se fait par récurrence en utilisant le lemme suivant :

LEMME 9

Soit f continue au voisinage de a et admet un $DL_n(a)$ de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors toute primitive F de f définie au voisinage de a admet le $DL_{n+1}(a)$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Les fonctions usuelles étant infiniment dérivables sur leurs domaines de définition (sauf en de rares exceptions comme $a = 0$ pour $x \mapsto \sqrt{x}$), la formule de Taylor-Young permet d'obtenir des $DL_n(0)$ dits « usuels ».

COROLLAIRE 10 (DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS)

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

EXERCICE 4.

1. Montrer que $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.
2. Déterminez le $DL_n(0)$ de $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
3. Montrer que $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

THÉORÈME 11 (PROLONGEMENT \mathcal{C}^1)

Soit f , une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Alors dans ces conditions :

- f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$
- f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

EXERCICE 5. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. (a) Ecrire le $DL_2(0)$ de e^{-x} puis en déduire le $DL_1(0)$ de $f(x)$.
(b) En déduire que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.
4. Déterminer le $DL_2(0)$ de $-(x+1)e^{-x} + 1$ puis en déduire que $f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$.
5. Conclure que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

THÉORÈME 12 (POSITION RELATIVE COURBE VS TANGENTE)

Soit f , une fonction définie au voisinage a admettant k fois dérivable en a admettant un $DL_k(a)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_k(x-a)^k + o((x-a)^k) \quad \text{avec } a_k \neq 0$$

on parle de a_k comme le premier terme non-linéaire du DL de f au vois. de a .

On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan. On a alors les points suivants :

1. La tangente à (C_f) au point d'abscisse a a pour équation $y = a_0 + a_1(x-a)$.
2. **si k est pair :**
 - si $a_k < 0$: alors f présente un maximum local en a et (C_f) est localement située en-dessous de sa tangente.
 - si $a_k > 0$: alors f présente un minimum local en a et (C_f) est locale-

ment située en-dessous de sa tangente.

3. **si k est impair :** f n'a pas d'extremum local en a , sa courbe présente un point d'inflexion en a , la tangente en a traverse la courbe (C_f) .

EXERCICE 6.

1. Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = (x+1)\ln(1+x) - 1$.
2. En déduire que f est dérivable en 0 et l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f à l'origine.
3. Que pouvez-vous dire de la position de (C_f) par rapport à (T) au voisinage du point $(0; \frac{1}{2})$?

3. Continuité globale

THÉORÈME 13 (THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES)

Toute fonction continue sur un **segment** $[a; b]$ est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_m, x_M) \in [a; b]^2 \quad \text{tels que} \quad f(x_m) = \min_{[a; b]} f \leq f(x) \leq \max_{[a; b]} f = f(x_M).$$

EXERCICE 7.

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum_n u_n$ est AC.

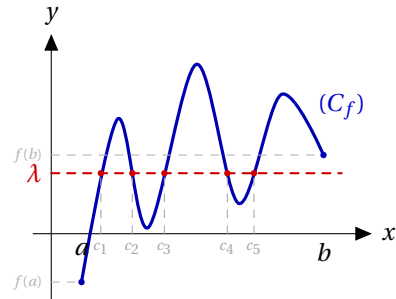
Montrer que la série $\sum_n \frac{f(u_n)}{n^2}$ CV.

THÉORÈME 14 (THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (TVI))

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a; b]$.

- **forme simple :** Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$.
- **forme générale :** Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
- **forme généralisée :** Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$, il existe $c \in [a; b[$ tel que $f(c) = \lambda$.
- **forme compacte :** L'image continue d'un intervalle (resp. segment) est un intervalle (resp. segment).

Illustration du théorème des valeurs intermédiaires



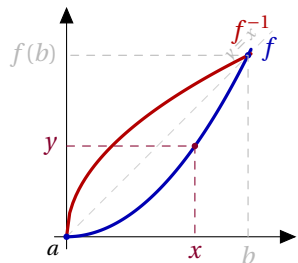
La valeur λ admet ici cinq antécédents c_1, \dots, c_5 : le TVI garantit l'**existence** mais pas l'**unicité** de c . La **continuité est indispensable** : la fonction partie entière ne prend jamais la valeur $\frac{1}{2}$ sur $[0;2]$, bien que $[0] = 0 < \frac{1}{2} < 1 = [1]$.

THÉORÈME 15 (THÉORÈME DE LA BIJECTION)

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I . Alors :

- f réalise une **bijection** de I sur $J = f(I)$, qui est un intervalle.
- La bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est **continue** et de même monotonie que f .

Illustration du théorème de la bijection



La courbe de f^{-1} s'obtient par **symétrie** de celle de f par rapport à la droite $y = x$ (en rouge sur la figure). À chaque $y \in [f(a); f(b)]$ correspond un **unique** $x \in [a; b]$ solution de l'équation $f(x) = y$.

REMARQUE 4.

Le théorème de la bijection est utilisé dans différentes situations, mais nous le rencontrons de manière classique dans deux types d'exercices :

- *candidat limite d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$* : il faudra montrer qu'une équation $f(x) = x$ admet une unique solution α ; il faudra alors bien prendre garde au fait d'appliquer ce théorème à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et non pas directement à f .
- *bonne définition d'une suite implicite* : il faudra montrer qu'une équation $f_n(x) = 0$ ou $f(x) = n$ admet une unique solution x_n .

Algorithme de Dichotomie :

On se place dans le cas d'une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a; b]$.

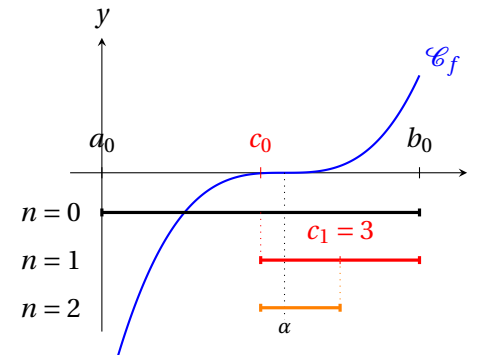
Algorithme en langage naturel

On initialise $a_0 = a, b_0 = b$. Tant que la précision souhaitée n'est pas atteinte, on répète, pour $n \in \mathbb{N}$:

1. calculer le milieu $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$;
2. si $f(c_n) = 0$: on a trouvé un zéro exact, $\ell = c_n$, on arrête ;
3. si $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$: le zéro est dans $[a_n; c_n]$, on pose $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$;
4. sinon ($f(c_n) \cdot f(b_n) < 0$) : le zéro est dans $[c_n; b_n]$, on pose $a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$.

Dans tous les cas, $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$ est préservé : l'intervalle $[a_n; b_n]$ contient toujours un zéro de f .

Illustration graphique de l'algorithme de dichotomie :



☞ *Remarque*: Sur ce schéma, f est strictement croissante (allure cubique) et s'annule en $\ell \approx 2,3$. À l'étape 0 : $f(c_0) < 0$ donc on garde $[c_0; b_0]$. À l'étape 1 : $f(c_1) > 0$ donc on garde $[a_1; c_1]$. Les intervalles $[a_0; b_0] \supseteq [a_1; b_1] \supseteq [a_2; b_2] \supseteq \dots$ s'emboîtent de longueur divisée par 2 à chaque étape, se resserrent autour de α .

PROPRIÉTÉ 16 (VITESSE DE CONVERGENCE)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad a_n \leq \alpha \leq b_n,$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers α un zéro de f , et le milieu $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ vérifie

$$|c_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Critère d'arrêt pratique

Pour obtenir une valeur approchée de α à une précision $\varepsilon > 0$ fixée, on arrête l'algorithme dès que $b_n - a_n \leq \varepsilon$, ce qui garantit $|c_n - \alpha| \leq \varepsilon$. D'après la Propriété précédente, cela revient à choisir

$$n \geq \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right),$$

c'est-à-dire un nombre d'itérations de l'ordre de $\log_2(1/\varepsilon)$: la précision est multipliée par 2 à chaque itération supplémentaire (convergence **géométrique de raison** $\frac{1}{2}$, indépendante de f).

(b) Compléter la fonction di cho(k) : qui renvoie une valeur approchée de α à 10^{-k} près :

```

1 def di cho(k):
2     a= ...
3     b= ...
4     while abs(b-a)> ... :
5         c=(a+b)/2
6         if ..... :
7             a=c
8         elif g(a)*g(c)<0:
9             .....
10        else:
11            a=c
12    return a

```

Implémentation pour f strict. croissante

```

1 def di cho(f, a, b, eps):
2     while np.abs(b-a)>eps:
3         c=(a+b)/2
4         if f(a)*f(c)==0:
5             c=a
6         elif f(a)*f(c)<0:
7             b=c
8         else:
9             a=c
10    return (a, b)

```

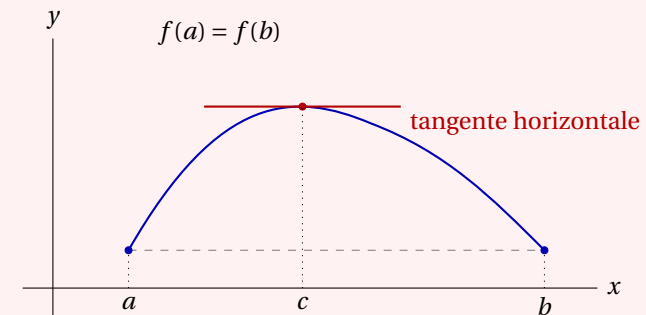
EXERCICE 8 (Algorithme de dichotomie). Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3}(\cos(x) + 1)$

- Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in]0; 1[$.
Hint : on donne $\cos(1) \approx 0,54$.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - Montrer que f est k -contractante pour $k \in]0; 1[$.
 - Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α et préciser la vitesse de convergence. *Hint : via l'IAF*
- On cherche à approcher α par dichotomie sur $g(x) = 0$ avec $g : x \mapsto f(x) - x$.
 - Ecrire une fonction def $g(x)$: qui renvoie $g(x)$ lorsque l'utilisateur entre la valeur de x .

4. Dérivabilité globale

THÉORÈME 17 (ROLLE)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Idée de preuve : f continue sur le segment $[a, b]$ y atteint son maximum et son minimum (théorème des bornes atteintes). Si les deux sont égaux à $f(a)$, f est constante et $f' \equiv 0$. Sinon, l'un des deux extrema est atteint en un point $c \in]a, b[$ (puisque $f(a) = f(b)$, il ne peut être atteint seulement aux bornes) : en ce point intérieur, $f'(c) = 0$ (condition nécessaire d'extremum local).

THÉORÈME 18 (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS (IAF))

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle $\sup_{]a, b[} |f^{(n+1)}(t)| \leq M$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

Idée : la dérivée bornée par M contraint la pente instantanée de f en tout point ; la courbe ne peut donc jamais sortir du « cône » délimité par les deux droites de pentes $\pm M$ issues de $(a, f(a))$ – en particulier le point $(b, f(b))$ reste dans ce cône, ce qui donne exactement $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$.

Lien avec Rolle : l'IAF se déduit du **théorème des accroissements finis** (TAF), lui-même conséquence de Rolle appliqué à $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ qui affirme l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$; il suffit alors de majorer $|f'(c)| \leq M$.

REMARQUE 5.

L'inégalité des accroissements finis est largement utilisée dans l'étude des suites récurrentes comme nous l'avons vu au cours de révisions antérieures.

COROLLAIRE 19 (INÉGALITÉ DE TAYLOR - LAGRANGE)

Soit f une fonction n -fois dérivable sur $[a, b]$ et $(n + 1)$ -fois dérivable sur $]a, b[$ et telle que $\sup_{]a, b[} |f^{(n+1)}(t)| \leq M$.

Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right| \leq \frac{M(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

EXERCICE 9 (Oral ESCP 2025). Soit une fonction continue, $[0, 1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, |e^t - 1| \leq |t|e^{|t|}$ et $|e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}$.
2. (a) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left| \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 \right| \leq \frac{K}{n}.$$

- (b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3. (a) Établir qu'il existe un réel K' tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| n(u_n - 1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{K'}{n}.$$

- (b) En déduire un équivalent de $u_n - 1$. *Hint : penser aux sommes de Riemann.*

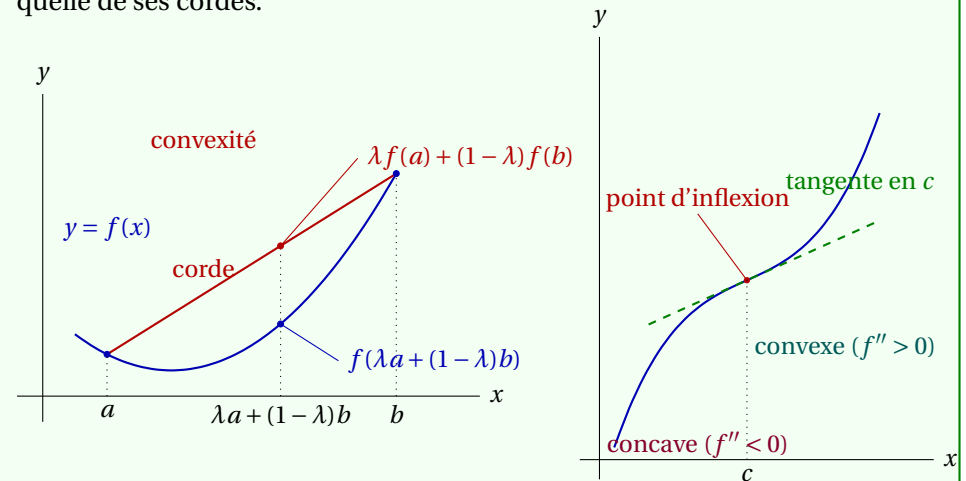
5. Convexité

DÉFINITION

- f est **convexe** sur un intervalle I si pour tout $a, b \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Géométriquement : la courbe de f est toujours **en dessous** de n'importe laquelle de ses cordes.



- f est **concave** sur I si $-f$ est convexe sur I ce qui se traduit pour tout $a, b \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ par :

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

- I est un **point d'inflexion** si f change de convexité au point I .

REMARQUE 6.

En un point d'inflexion, la tangente (si elle existe) **traverse** la courbe au lieu de rester d'un seul côté.

PROPRIÉTÉ 20 (CARACTÉRISATIONS DE LA CONVEXITÉ)
si f est dérivable sur I :

analytique : f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur I .

géométrique : f est convexe sur $I \iff$ la courbe de f est au-dessus de ses tangentes

si f est de classe \mathcal{C}^2 sur I :

f est convexe sur $I \iff f'' > 0$ sur I

Démontrer une inégalité à l'aide de la convexité

Étape 1 – Repérer la fonction et sa convexité. Identifier f , et déterminer sa convexité sur un intervalle bien choisi (souvent en étudiant le signe de f'' , ou en citant une convexité usuelle : \exp est convexe sur \mathbb{R} , \ln est concave sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} , etc.).

Étape 2 – Choisir le bon outil. Deux inégalités possibles selon la forme de ce qu'on veut démontrer :

- **Inégalité de la corde** (utile si l'énoncé fait intervenir un barycentre $\lambda a + (1 - \lambda)b$, ou une moyenne) : si f est convexe sur I , pour tous $a, b \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

(inégalité renversée si f est concave).

- **Inégalité de la tangente** (utile si l'énoncé compare $f(x)$ à une expression affine en x) : si f est convexe et dérivable sur I , pour tout $c \in I$ et tout $x \in I$,

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$$

(inégalité renversée si f est concave).

Étape 3 – Choisir intelligemment les paramètres. Le point c (ou les points a, b et le poids λ) ne sont presque jamais donnés explicitement : c'est à vous de les choisir en fonction de ce que vous voulez obtenir. Indice classique : le point où la tangente touche la courbe correspond souvent à une valeur où l'inégalité devient une égalité.

Étape 4 – Conclure. Simplifier l'inégalité obtenue pour retrouver exactement la forme demandée.

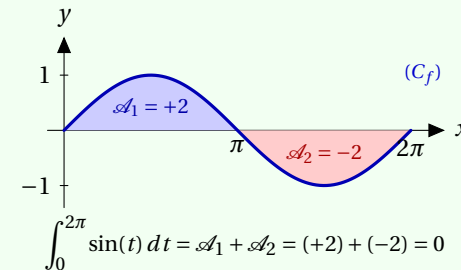
EXERCICE 10 (Inégalités de convexité).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.
3. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
C'est l'inégalité arithmético-géométrique (cas $n = 2$), avec égalité si et seulement si $a = b$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$, puis en déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

6. Intégration sur un segment
DÉFINITION

- Soit f continue par morceaux sur $[a; b]$. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est bien définie. **Interprétation géométrique** : c'est l'aire algébrique entre (C_f) et l'axe des abscisses (positive là où $f > 0$, négative là où $f < 0$).



- On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

THÉORÈME 21 (THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'INTÉGRATION)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et F la fonction définie par :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt.$$

Alors :

- F est l'unique primitive de f s'annulant en a
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, si f est de classe \mathcal{C}^k sur I alors F est de classe \mathcal{C}^{k+1} sur I .

THÉORÈME 22 (TECHNIQUES DE CALCULS D'INTÉGRALES)

- **primitivation** : avec F une primitive de f

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

- **intégration par parties** : avec u, v de classe C^1 sur $[a; b]$

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

- **changement de variable** : avec u de classe \mathcal{C}^1 strict. croissante sur $[a; b]$

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u(t))u'(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

EXERCICE 11. Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$
- $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$
- $\int_0^{1/2} (v^2 + e^{-2v}) dv$
- $\int_0^1 te^{2t} dt$
- $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$
- $\int_0^x \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} dt$
($u = e^t + 1$)

PROPRIÉTÉ 23

- **Linéarité** : $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$
- **Chasles** : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$ pour tout c
- **Positivité** : $f \geq 0$ sur $[a; b] \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0$
- **Intégrale nulle** : $f \geq 0$ sur $[a; b]$ et $\int_a^b f(t) dt = 0 \Rightarrow f = 0$ sur $[a; b]$
- **Inégalité triangulaire** : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

- **Majoration** : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left(\max_{[a; b]} |f| \right) (b - a)$
- **Parité** : f paire sur $[-a; a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$
- **Imparité** : f impaire sur $[-a; a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

EXERCICE 12 (suites d'intégrales avec cos). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \cos(x) dx.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{\cos(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} \sin(x) dx.$$

4. En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 13 (Oral ESCP 2013). Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sin(t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D_f .
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x = 0$. On note \tilde{f} la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que \tilde{f} est dérivable sur \mathbb{R} . Calculer $\tilde{f}'(0)$.
6. La fonction \tilde{f} est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

Quelques utilisations dans d'autres contextes :

THÉORÈME 24 (CONVERGENCE DES SOMMES DE RIEMANN)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. Alors les suites

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

convergent toutes deux vers $\int_a^b f(t) dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Cas particulier usuel ($a = 0, b = 1$) :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

Reconnaître une somme de Riemann

- repérer un facteur $\frac{1}{n}$ devant une somme de n termes indexés par k ;
- écrire le terme général sous la forme $f\left(\frac{k}{n}\right)$ (ou $f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ si l'intervalle n'est pas $[0; 1]$) pour une fonction f **continu**e bien identifiée;
- conclure : la somme converge vers $\int_0^1 f$ (ou $\int_a^b f$);
- si la somme apparaît sous une forme multiplicative (produit, racine n -ième), passer au **logarithme** pour se ramener à une somme, puis repasser à l'exponentielle à la fin.

EXERCICE 14 (Application directe).

Etudier la convergence de la suite $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$.

EXERCICE 15 (Un produit infini). On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n = \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{1/n}.$$

- Justifier que $P_n > 0$, et exprimer $\ln(P_n)$ comme une somme de Riemann.
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

THÉORÈME 25 (FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL)

Si f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a; b]$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

EXERCICE 16 (Somme de la série harmonique alternée).

Soit $f(x) = \ln(1+x)$, définie sur $] -1; +\infty[$. Pour $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

- Calculer $f^{(k)}(t)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t > -1$, et en déduire $f^{(k)}(0)$.
- Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Hint : minorer $(1+t)^{n+1}$ par 1 pour $t \in [0; x]$.
- En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ et retrouver la valeur de la somme de la série harmonique alternée $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

7. Intégrales généralisées

DÉFINITION

Soit f continue par morceaux sur $[a; +\infty[$. On pose :

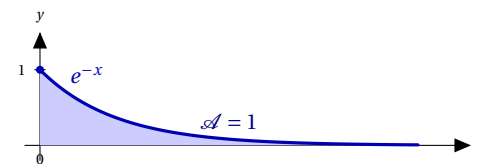
$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(t) dt$$

si cette limite existe et est finie : l'intégrale **converge**. Sinon, elle **diverge**. De même sur $] -\infty; b]$ et sur \mathbb{R} (on décompose en deux intégrales).

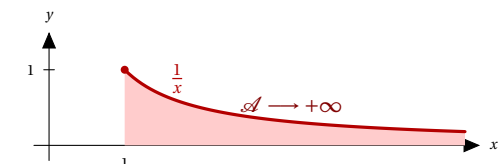
Pour un intégrale continue sur un intervalle du type $[a; b[$ avec $b \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

si cette limite existe et est finie : l'intégrale **converge**. Sinon, elle **diverge**. De même sur $] a; b]$ et sur $] a; b[$ (on décompose en deux intégrales).




Convergente : $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$



Divergente : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = +\infty$

REMARQUE 7. 1. L'intégrale généralisée jouit des mêmes propriétés que l'intégrale classique (linéarité, relation de Chasles, etc ...) sauf bien entendu, la propriété de majoration qui n'a pas de sens sur un intervalle infini. Il faudra par contre, bien penser à montrer la convergence des intégrales en jeu avant de pouvoir utiliser ces propriétés.

2. **Cas des intégrales faussement impropre :** si $f : [a; b \rightarrow \mathbb{R}[$ se prolonge par continuité en b , alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ impropre en b est convergente.

3.  L'utilisation des techniques de calculs d'intégrales (primitivation, IPP ou changement de variables) ne se font pas directement sur l'intégrale généralisée, on le fait sur les **intégrales partielles** $I_A = \int_a^A f(t) dt$ ou sur $\int_a^x f(t) dt$ suivant que l'impropriété est en $+\infty$ ou en b .

4. Enfin, on prendra garde aux raisonnements hâtifs, concernant l'étude des intégrales doublement impropres de type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ ou $\int_a^b f(t) dt$ en prenant soit de décomposer en deux par la relation de Chasles ou bien et en étudiant $\lim_{B \rightarrow +\infty} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_B^A f(t) dt$ ou $\lim_{y \rightarrow a} \lim_{x \rightarrow b} \int_y^x f(t) dt$ (l'ordre des limite n'a ici pas d'importance).

THÉORÈME 26 (INTÉGRALES DE RÉFÉRENCES)

Intégrales de Riemann : Soit $\alpha > 0$. Alors :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha > 1 \text{ et dans ce cas : } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff 0 < \alpha < 1 \text{ et dans ce cas : } \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Intégrales exponentielles :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \text{ converge} \iff \lambda > 0 \text{ et dans ce cas : } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Intégrale logarithmique :

$$\int_0^1 \ln(t) dt \text{ converge} \text{ et } \int_0^1 \ln(t) dt = -1$$

Calcul d'une intégrale généralisée

- **Identifier la ou les bornes impropres :** on regarde la continuité de la fonction f sur l'intervalle d'intégration (une borne infinie est toujours impropre). Si f se prolonge par continuité en une borne finie alors l'intégrale est faussement impropre en cette borne.
- **Calculs en « omettant les bornes impropres » :** on effectue des calculs sur des intégrales du type $I_A = \int_a^A f(t) dt$ (pour la borne $+\infty$) ou $I_x = \int_a^x f(t) dt$ (pour la borne b) à l'aide des techniques classiques de calcul d'intégrale (primitivation, IPP ou changement de variables).
- **Convergence :** on fait tendre $A \rightarrow +\infty$ dans $I_A = \int_a^A f(t) dt$ ou $x \rightarrow b$ dans $I_x = \int_a^x f(t) dt$ en utilisant toutes les techniques que l'on connaît sur le calcul de limites (croissances comparées, équivalents, etc ...).
- **Conclusion :** on la convergence ou la divergence de l'intégrale en cette borne impropre selon que la limite est finie ou infinie. *Dans le cas d'intégrales doublement impropres, on doit avoir la convergence aux deux bornes impropres pour avoir la convergence de l'intégrale initiale.*

EXERCICE 17.

Etudier la nature des intégrales suivantes et les calculer en cas de convergence :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$

2. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt$

3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)} dt$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt$

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t)^2}{1+t^2} dt$

8. $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$

9. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3} e^{-1/t} dt$

10. $\int_0^1 \frac{1}{u(1-\ln u)^2} du$

11. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$
en posant $u = e^x$

12. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt$
en posant $u = e^{-t}$

13. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$
en posant $u = \sqrt{t}$.

THÉORÈME 27 (CRITÈRES DE CV POUR LES FONCTIONS POSITIVES)

On suppose f positive.

critère de comparaison :

$$0 \leq f(t) \leq g(t) \implies \begin{array}{ll} \text{si } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ CV} & \text{alors } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ CV} \\ \text{si } \int_a^{+\infty} d(t) dt \text{ DV} & \text{alors } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ DV} \end{array}$$

critère de négligeabilité : si alors

$$f(t) \underset{+\infty}{=} o(g(t)) \implies \begin{array}{ll} \text{si } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ CV} & \text{alors } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ CV} \\ \text{si } \int_a^{+\infty} d(t) dt \text{ DV} & \text{alors } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ DV} \end{array}$$

critère d'équivalence :

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t) \implies \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ sont de même nature.}$$

EXERCICE 18.

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+2t)\sqrt{t}} & 5. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}} dx & 9. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ 2. \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t \ln t)^2} dt & 6. \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt & 10. \int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right) dx \\ 3. \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & 7. \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx & 11. \int_{-1}^0 \frac{\ln(1+x)}{x} dx \\ 4. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x} dx & 8. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(u)} du & 12. \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx \end{array}$$

EXERCICE 19 (Oral ESCP 2029). On considère l'intégrale suivante : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$.

(b) Montrer que cette intégrale est convergente pour $x = 0$.

On pose alors, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

3. (a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
 - (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
 - (c) En déduire une relation entre x , $f(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Intégrales absolument convergentes
DÉFINITION

On dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est **absolument convergente** si $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

PROPRIÉTÉ 28

- **AC \Rightarrow CV** : si une intégrale est AC alors elle est CV.
- **Inégalité triangulaire** : sous réserve d'AC on a $\left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt$.

REMARQUE 8.

Comme pour les séries, il existe des intégrales semi-convergentes.

EXERCICE 20 (Une intégrale semi-convergente). 1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt$.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = 2$.

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$.

(d) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

Ainsi, l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge mais ne converge pas absolument. Elle est dite **semi-convergente**.